

Uso del Geogebra como herramienta para la mediación pedagógica de la matemática

Nivel Intermedio

Elaborado por Juan Pablo Serrano
Echeverría.

Asesor de Matemática

Departamento Diseño, Producción y Gestión de
Recursos Tecnológicos.

Dirección de Recursos Tecnológicos en
Educación.

MEP 2010

Antes de empezar:

Para seguir este manual se recomienda dominar los siguientes conceptos básicos:

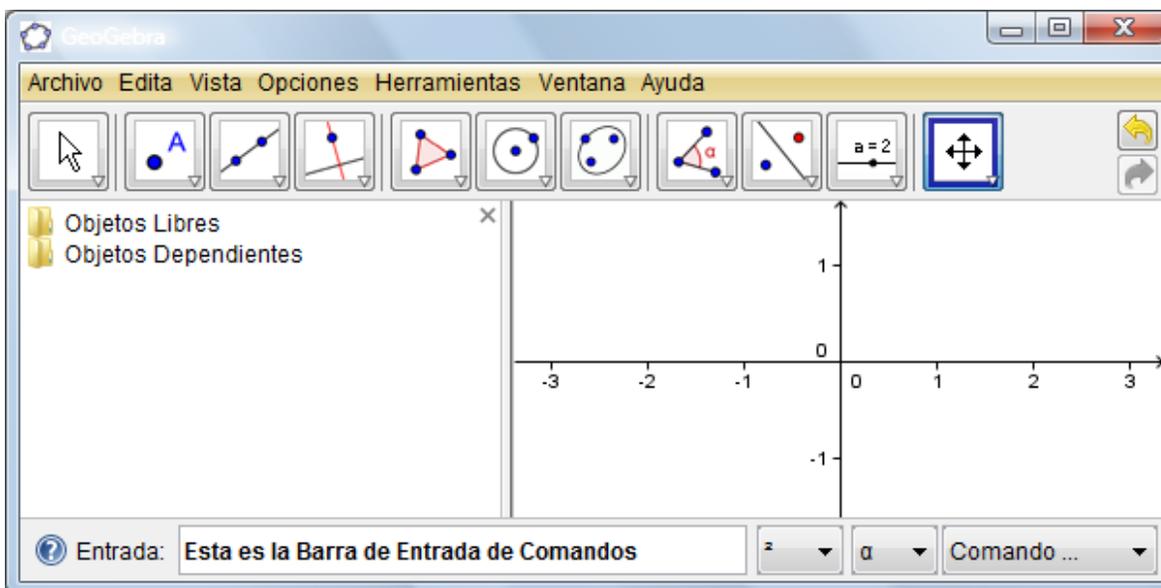
- Uso de herramientas iconográficas y entorno general.
- Edición de las propiedades de los objetos.
- Construcciones Geométricas.
- Concepto de deslizador.
- Aplicaciones interactivas.
- Gráfica de funciones.
- Impresión de texto dinámico en pantalla.
- Exportación de construcciones a herramientas ofimáticas.
- Generación de aplicaciones en html.

Las prácticas y explicaciones suponen el dominio de lo anterior.

Comandos escritos utilizando la entrada de comandos

Comandos Escritos utilizando la entrada de comandos

En Geogebra los íconos gráficos ofrecen una gran variedad de herramientas para trabajar. A esta altura, usted ya conoce que con ellas puede lograr realizar aplicaciones interactivas de gran complejidad. Sin embargo, el software ofrece una gama mucho más amplia de herramientas, utilizando la barra de entrada de comandos.



Este manual está realizado de la siguiente manera: Se transcribe textualmente lo que aparece en la ayuda de Geogebra (se encierra con un marco) y se enriquece con ejemplos, prácticas y comentarios elaborados por Juan Pablo Serrano Echeverría (juanpserrano@gmail.com).

Comandos de impresión en pantalla

TextoFracción

TextoFracción[Número]: Convierte el número o valor numérico en una fracción, que se expone como un objeto de texto (LaTeX) en la *Vista Gráfica*..

Ejemplo: Siendo $y = 1.5x + 2$ una recta, TextoFracción [Pendiente[a]] da por resultado, como texto expuesto en la *Vista Gráfica*, $3/2$.

Este comando es útil para escribir los criterios de las funciones:

Realice una aplicación que grafique una función lineal con dos deslizadores m y b , $f(x) = m x + b$.
Imprima en pantalla el criterio utilizando el comando TextoFracción[] de la siguiente manera:

Práctica 1

Imprime los siguientes textos en pantalla:

"f(x)= "

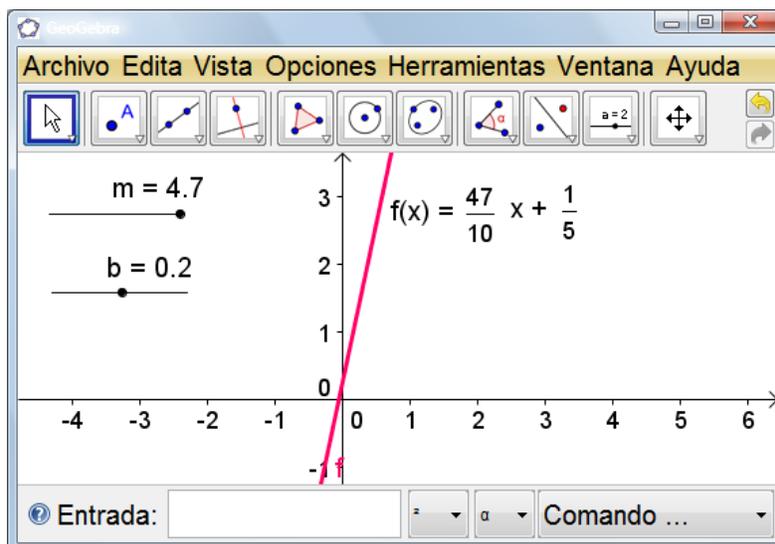
En un nivel intermedio, podemos escribir el texto entre comillas directamente en la entrada de comandos.

"x + "

Cada uno en un texto diferente.

Luego escribe TextoFracción[m] y TextoFracción[b].

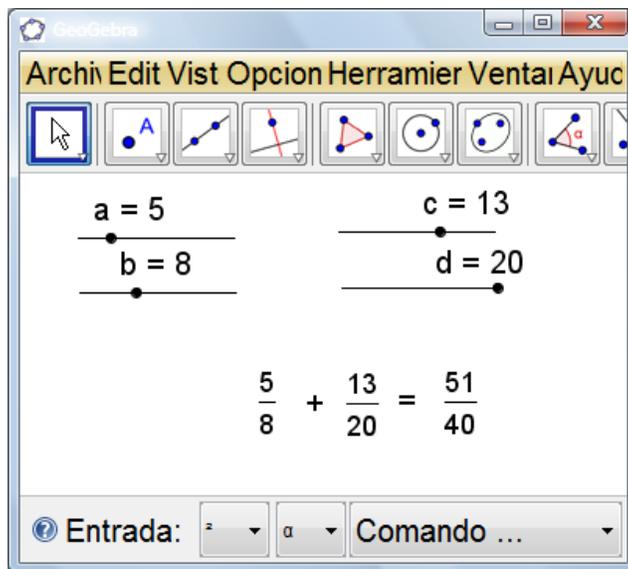
Acomódalos utilizando el comando desplace para que queden de la siguiente forma:



¿Habrá alguna forma de escribir en una sola línea todo esto de forma que sea un solo objeto?

Nota: Geogebra es key sensitive, lo que significa que se deben respetar las mayúsculas en los comandos y los nombres, por ejemplo TextoFracción[] es el comando válido, pruebe con Textofracción[] o textofracción[]

1. Construya una aplicación que imprima la suma de dos fracciones. Utilice cuatro deslizadores tal y como aparece en la siguiente ilustración. Nótese que el incremento de cada deslizador debe definirse en 1. Utilice el comando TextoFracción[[]].



Existen otros comando de impresión de Texto en pantalla, tales como

TablaTexto

TablaTexto[Lista 1, Lista 2, Lista 3,...]: Crea una tabla de texto que contiene las listas de objetos dadas.

Atención: Por omisión, cada lista se expone como nueva columna de la tabla.

Ejemplos:

TablaTexto[$\{x^2, x^3, x^4\}$] crea una tabla como objeto de texto con tres filas y tres columnas. Todos los ítems de la tabla se alinean a izquierda.

TablaTexto[Secuencia[$i^2, i, 1, 10$]] crea una tabla como objeto de texto con una fila. Todos los ítems de la tabla se alinean a izquierda.

Práctica 2

1. Realice la impresión en pantalla del texto del primer ejercicio de la Práctica 1 utilizando TablaTexto[[]].
2. Analice y comente los comandos siguientes:

TablaTexto[Lista 1, Lista 2, Lista 3,..., "Alineación del Texto"]: Crea un texto que contiene una tabla de las listas de objetos. El texto adicional optativo, "Alineación del texto" controla la orientación y alineación de la tabla de texto. Atención: Los posibles valores son "vl", "vc", "vr", "v", "h", "hl", "hc", "hr". El valor por omisión es "hl".

"v" = vertical, de modo que las listas se organizan como columnas

"h" = horizontal, de modo que las listas se organizan como filas

"l" = alineación a izquierda

"r" = alineación a derecha

"c" = alineación centrada

Ejemplos:

TablaTexto[$\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 4, 9, 16\}$, "v"] crea una tabla de texto con dos columnas y cuatro filas cuyos elementos se alinean a izquierda.

TablaTexto[$\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 4, 9, 16\}$, "h"] crea una tabla de texto con dos filas y cuatro columnas cuyos elementos se alinean a izquierda.

TablaTexto[$\{11.2, 123.1, 32423.9, "234.0"\}$, "r"] crea una tabla de texto con una fila cuyos elementos se alinean a derecha.

Texto

Texto[Objeto]: Da por resultado el objeto de texto correspondiente al dado por su fórmula.

Atención: Por omisión, cada variable es sustituida por su correspondiente valor.

Ejemplo: Si $a = 2$ y $c = a^2$, entonces, Texto[c] da por resultado el texto "4".

Texto[Objeto, Booleana para Sustitución de Variables]: Da por resultado el objeto de texto correspondiente al dado por su fórmula. La condición Booleana determina si las variables son sustituidas por sus valores (cierto) o por sus nombres (falso), y expuestas del correspondiente modo.

Ejemplo: Si $a = 2$ y $c = a^2$, entonces
Texto[c, cierto] Da por resultado el texto "4".

Texto[c, falso] Da por resultado el texto " a^2 "

Texto[Objeto, Punto]: Da por resultado el objeto de texto correspondiente al dado por su fórmula, expuesto en la posición señalada por el punto.

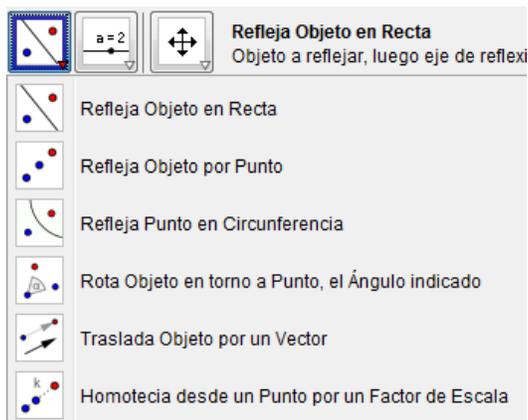
Ejemplo: Texto["hola", (2, 3)] expone ese texto en la posición (2, 3).

Texto[Objeto, Punto, Booleana para Sustitución de Variables]: Da por resultado el objeto de texto correspondiente al dado por su fórmula, expuesto en la posición señalada por el punto.

La condición Booleana determina si el texto a exponer será el de los valores de las variables (cierto) o al de sus nombres (falso).

Aplicaciones utilizando transformaciones geométricas.

Las transformaciones geométricas en Geogebra se realizan con los comandos iconográficos



Ejemplo 1. Reflexión de un objeto en una recta.

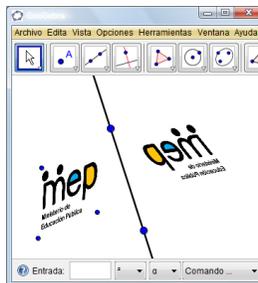
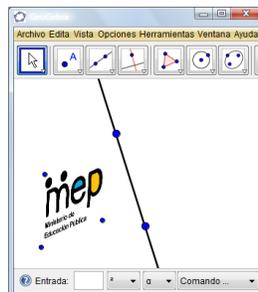
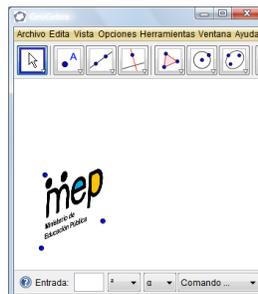


Inserta una imagen utilizando el comando

Traza tres puntos en el plano: A, B, C.
Utilizando las propiedades de la imagen, fija
tres esquinas de la misma con A, B, C.

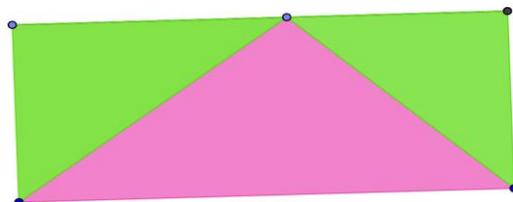
Traza una recta con puntos nuevos en el plano.

Utilizando  selecciona la imagen y la recta

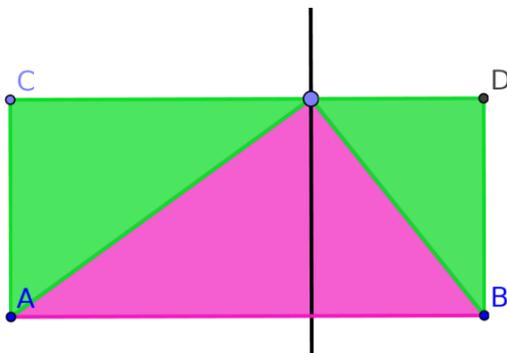


Ejemplo 2. Uso de transformaciones geométricas para comprobar conceptos matemáticos

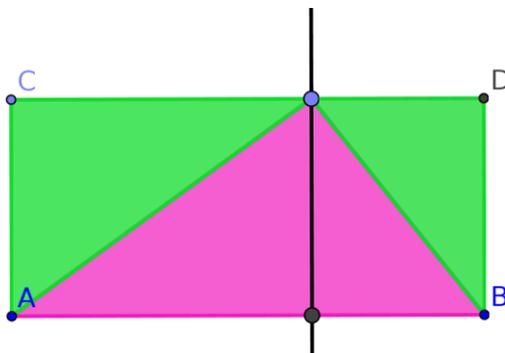
Procedimiento para realizar una aplicación donde se pueda comprobar la fórmula del área de un triángulo. Trasladar y rotar dos triángulos.



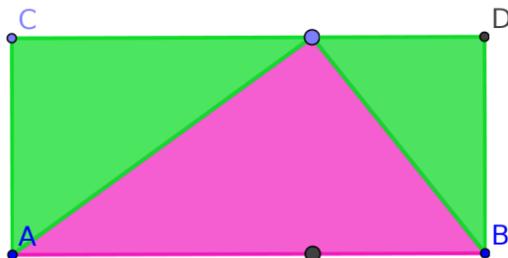
El primer paso es trazar una perpendicular a la base y pasando por el vértice opuesto a la misma.



Luego marca el punto de intersección con la base

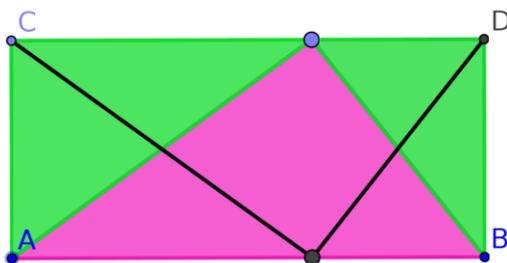


Ocultar la recta trazada y dejar solo el punto de intersección.

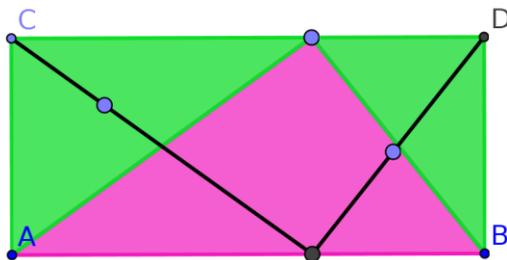


Ese punto será el extremo para cada vector de traslación.

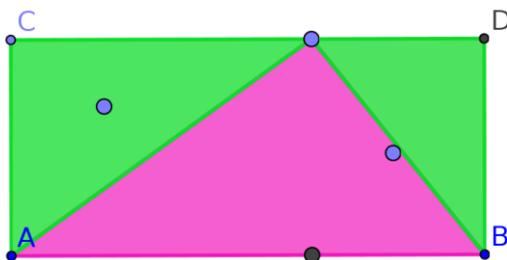
Trazar el segmento de C con el punto trazado. Hacer lo mismo con D y el punto trazado.



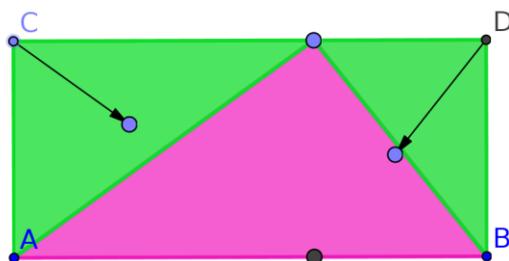
Marcar un punto en cada segmento



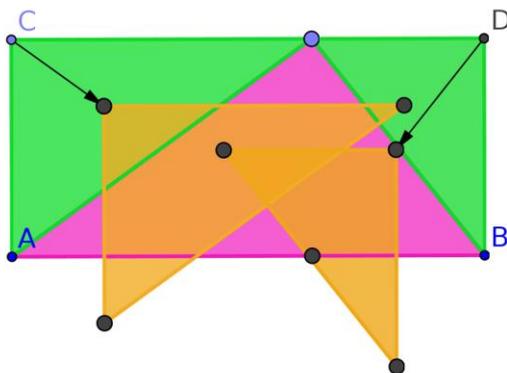
Ocultar cada segmento



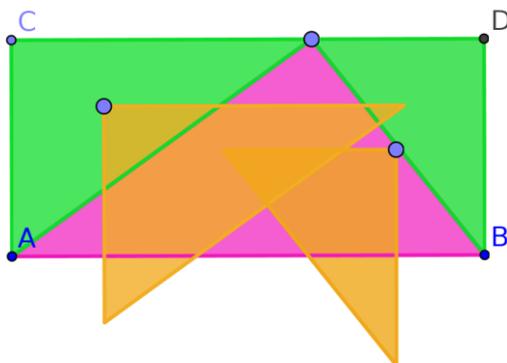
Trazar un vector con inicio en C y punto final uno de los puntos trazados. Hacer lo mismo con D y el otro punto.



Hacer una traslación de cada triángulo verde con su respectivo vector



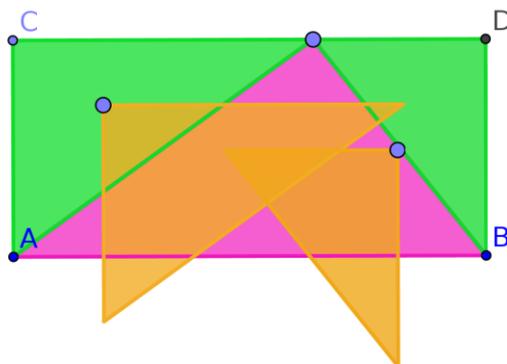
Ocultar el vector y los puntos de cada polígono nuevo. Ocultar también el punto de intersección.



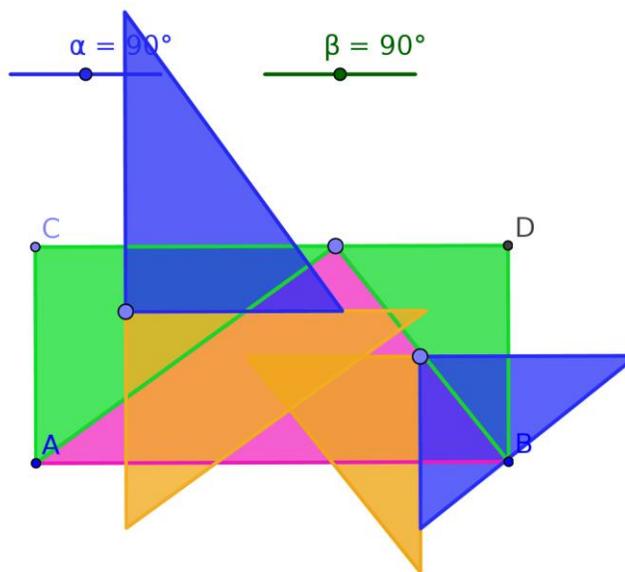
Este es la primera parte. Ya tienes dos triángulos que se pueden trasladar. Faltan las rotaciones.

Rotaciones: Trazar dos deslizadores angulares (mínimo 0° y máximo 180°)

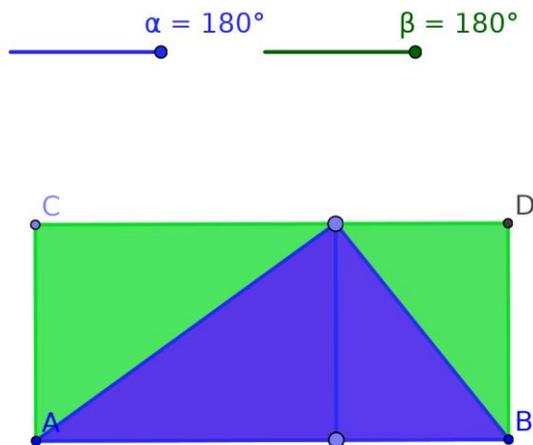
$\alpha = 0^\circ$ $\beta = 1^\circ$



Lo que sigue ahora es rotar los triángulos anaranjados con su respectivo deslizador. Poner cada deslizador en 90° para que sea fácil de identificar. Pintarlos de azul.

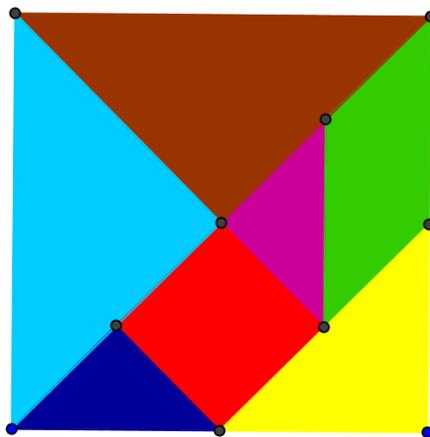


Ocultar cada triángulo anaranjado.



Práctica 5

2. Realice una aplicación que se llame Tangrama, de tal manera que pueda mover cada figura con un punto y pueda rotar cada una, con su respectivo deslizador, que cambie de 45° en 45° .



Condicionales para aparecer o desaparecer objetos. Propiedades avanzadas de los objetos.

Condicionales

El uso de condicionales es útil para hacer aparecer o desaparecer objetos dada una situación específica. El primer comando es:

Comando Booleano

Si

Si[condición, Objeto a]: Proporciona una copia del objeto *a* si la *condición* resulta cierta, y un objeto indefinido si se la evalúa falsa..

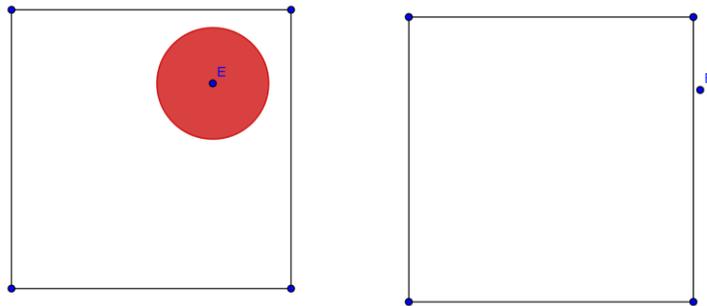
Si[condición, Objeto a, Objeto b]: Proporciona una copia del objeto *a* si la *condición* resulta cierta, y una del objeto *b* si se la evalúa falsa.

Si[Condición, Entonces]

Si[Condición, Entonces, Si no]

Ejemplo 1:

Realice una aplicación que muestre una circunferencia en el interior de un cuadrado. Cuando la circunferencia deja de estar en su totalidad dentro del cuadrado, esta desaparecerá.



Para resolver este problema, trace los puntos $A=(0,0)$, $B=(0,5)$, $C=(5,0)$, $D=(5,5)$.

Dibujar una circunferencia de centro *E* y radio = 1 unidad.

Piense que condición debe cumplir *E* cuando la circunferencia está en el interior del cuadrado.

La solución se encuentra utilizando el comando Si[condición, objeto].

Trate de resolverlo y compare con la solución planteada en la siguiente página:

Digitar en la entrada de comandos:

$$\text{Si}[x(E) + 1 \leq 5 \wedge x(E) - 1 \geq 0 \wedge y(E) + 1 \leq 5 \wedge y(E) - 1 \geq 0, e]$$

Con esto se resuelve el problema planteado.

Otro comando interesante es el de funciones condicionales:

Funciones

Funciones Condicionales

Puede usarse el comando Booleano **si** para crear una función condicional.

Ejemplos::

$f(x) = \text{Si}[x < 3, \sin(x), x^2]$ ofrece una función igual a:

- $\sin(x)$ para $x < 3$ y
- x^2 para $x \geq 3$.
- $a \stackrel{?}{=} 3 \wedge b \geq 0$ evalúa si “ a es igual a 3 y b es mayor o igual que 0”

Atención: Los símbolos para las expresiones condicionales (como $\stackrel{?}{=}$, \wedge , \geq) se encuentran en el menú desplegable del extremo izquierdo de la *Barra de Entrada*.

Una forma de usar condicionales es a través de las propiedades avanzadas de los objetos o por

medio de las casilla de control .

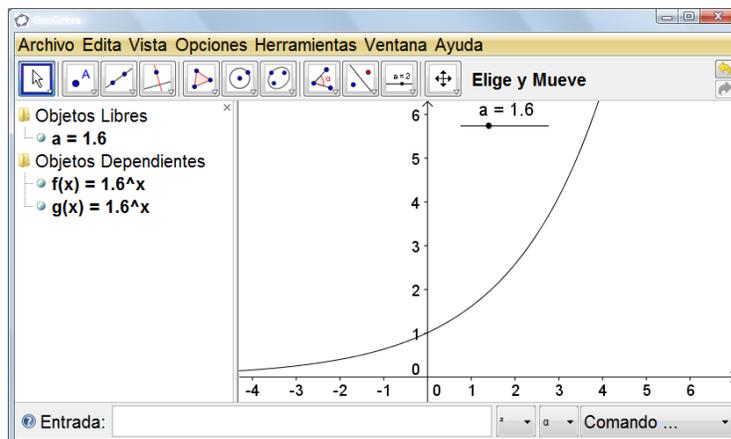
Ejemplo 2:

Dibuje una función exponencial con base variable (deslizador) y que la parte cuya imagen sea menor que 1 sea siempre de color rojo y aquella cuya imagen sea mayor que 1, azul.

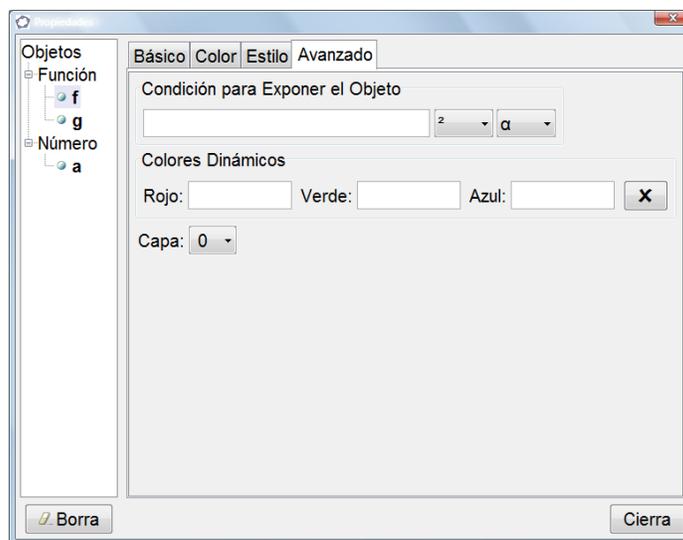
La solución se encuentra en la próxima página.

Primero se grafica la función exponencial con el siguiente comando:

Función[a^x , -100, 0] y también Función[a^x , 0, 100]

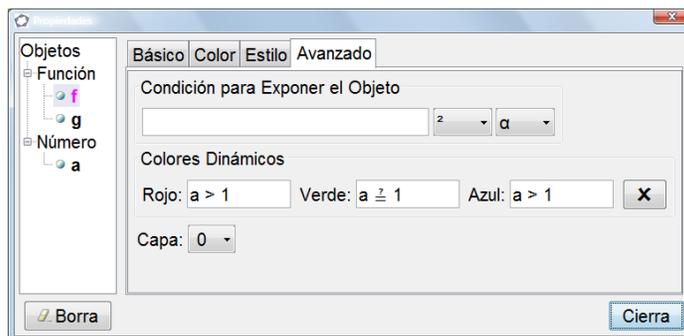


Posteriormente se activa el cuadro de propiedades (clic derecho sobre un objeto) y se selecciona la pestaña “Avanzado”

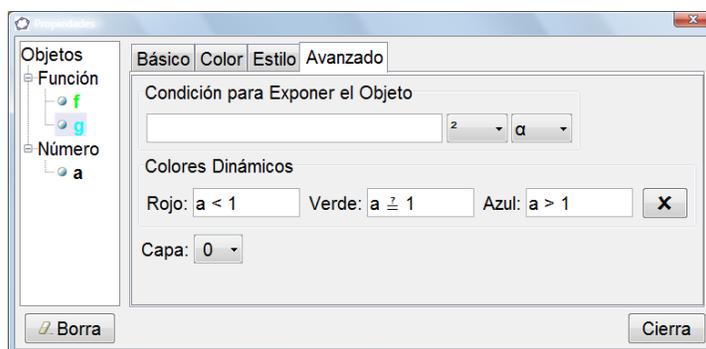


En mi caso, este trozo tiene todas sus imágenes menores que 1, por lo que será de color rojo si $a > 1$ y azul si $a < 1$.

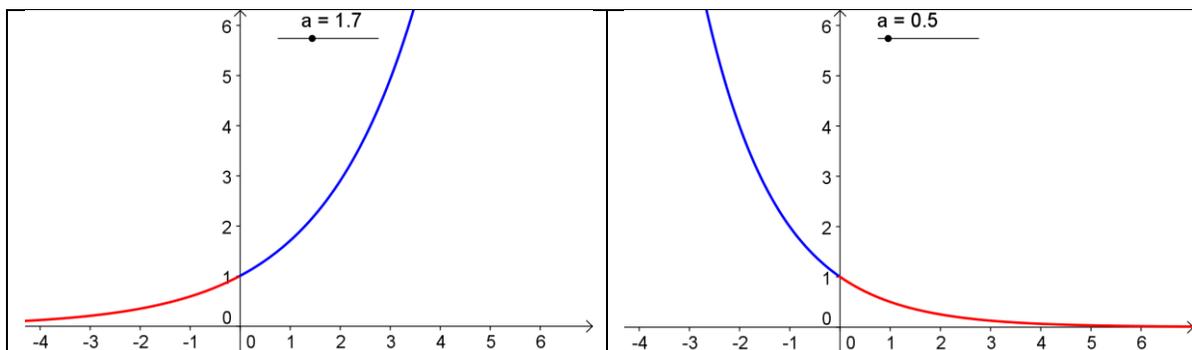
Para f:



Para g:



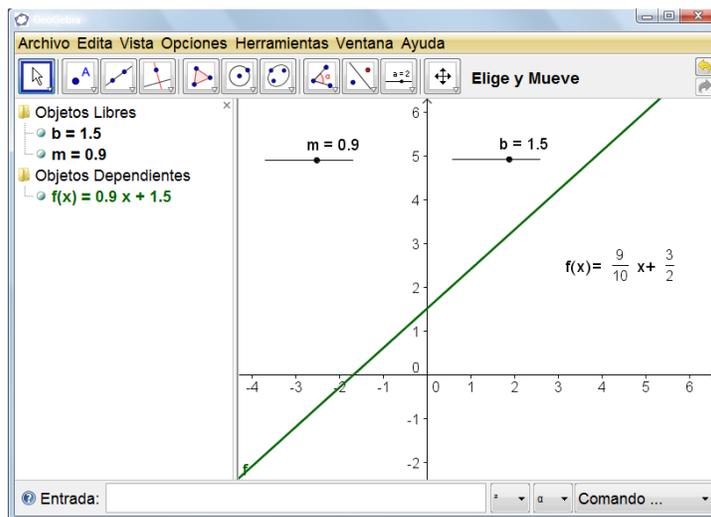
Luego la gráfica queda así



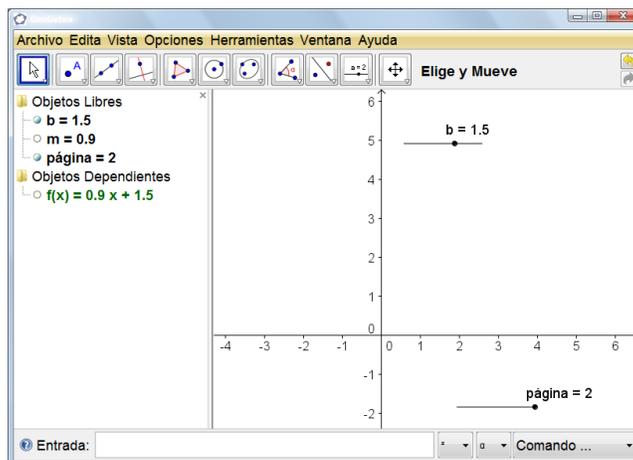
Ejemplo 3.

Gráfico de una función lineal y una cuadrática en una misma aplicación sin que vean al mismo tiempo.

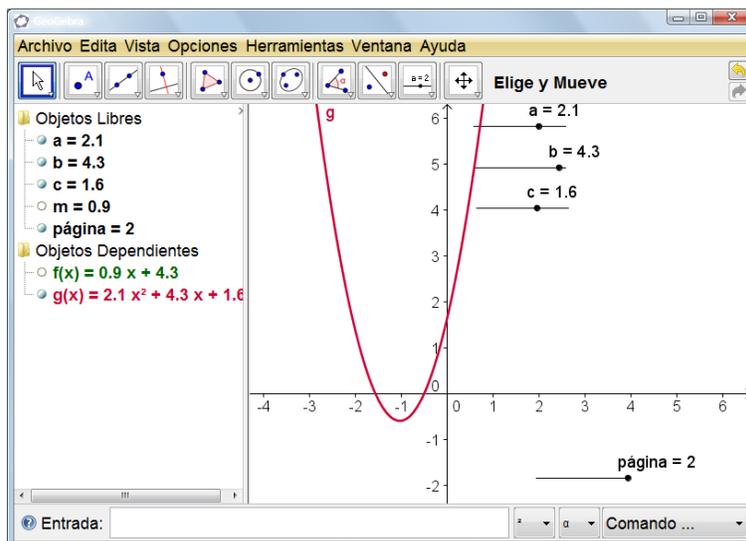
1. Se grafica una función lineal. Puede utilizar el archivo del primer ejemplo de este folleto.



2. Inserte otro deslizador, con incremento de 1 en 1 y con valores 1 y 2. Llámelo página.
3. Abra el cuadro de propiedades de la recta y en propiedades avanzadas, en la condición para aparecer el objeto digite página==1.
4. Repetir el procedimiento para m y el Texto 1. Poner aceptar y luego colocar página en 2.



5. Trace la cuadrática. Dibuje los deslizadores que falten.



6. Repetir el paso 3 pero con la gráfica de la cuadrática, a y c.

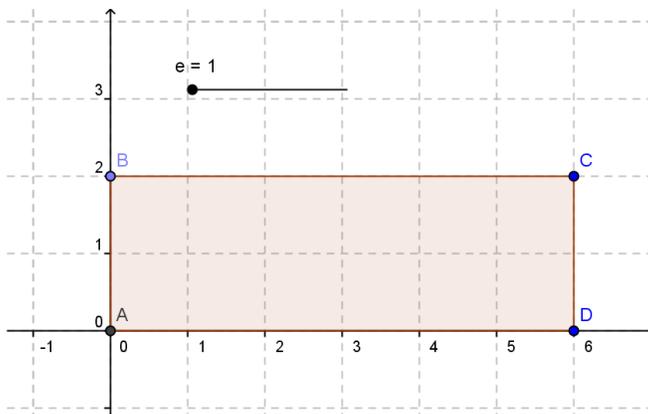
Listas y Secuencias

Estudie el Anexo 2, que contiene los comando de Listas y Secuencias del manual. Realice los ejemplos que considere necesarios.

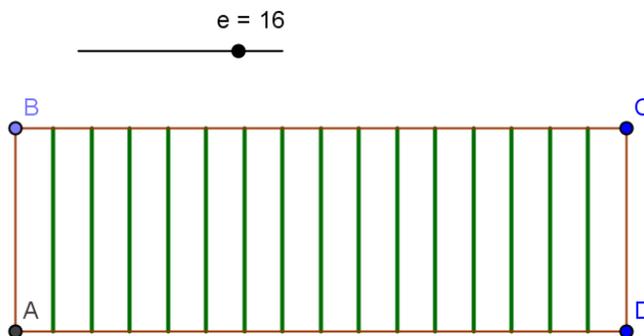
Ejemplo 1.

Dibujo dinámico de fracciones.

1. Trace un rectángulo cuyos vértices sean los puntos $(0,0)$, $(6,0)$, $(6,2)$ y $(0,2)$.
2. Inserte un deslizador con incremento unitario, con valor mínimo 1 y máximo 20.

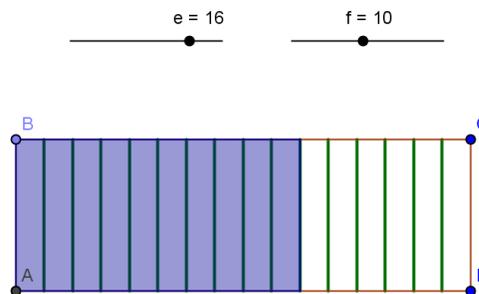


3. Oculte cuadrícula y ejes.
4. Construya una secuencia de segmentos, de tal forma que divida la unidad en e partes iguales. Utilice el comando `Secuencia[Segmento[(6 i / e, 0), (6 i / e, 2)], i, 1, e - 1]`.



5. Trace un nuevo deslizador con incremento unitario, con valor mínimo 1 y máximo 20.
6. Dibuje dos puntos con coordenadas $(6 f / e, 0)$ y $(6 f / e, 2)$.

7. Dibuje el polígono formado por los puntos anteriores y A y B. Oculte los elementos que deba ocultar.

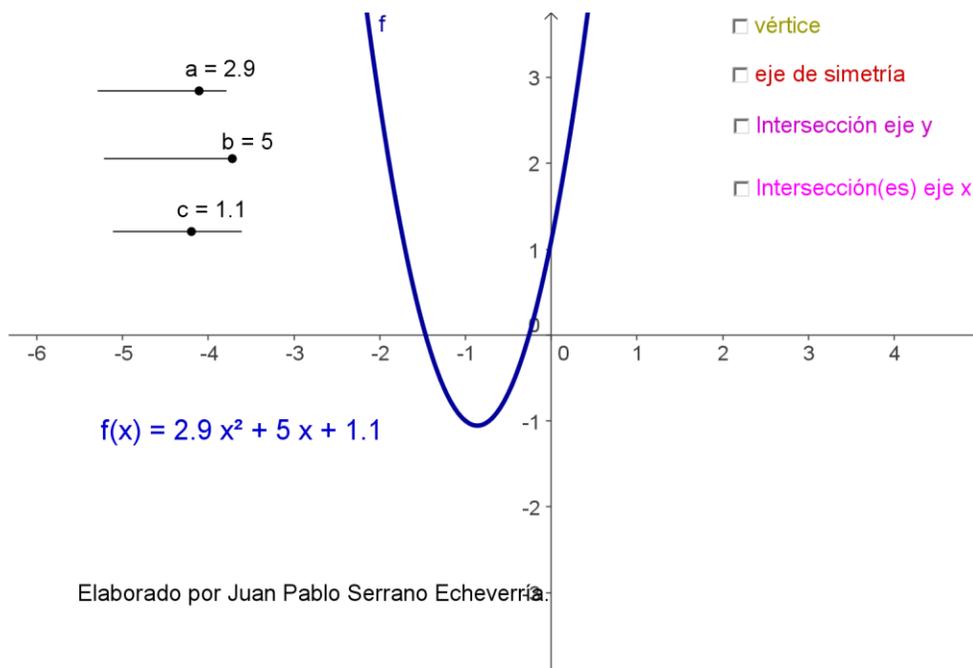


8. Utilizando las propiedades avanzadas del polígono recién construido, indique como condición para mostrar el objeto que $f \leq e$.

Ejemplo 2.

Utilice el comando secuencia para dibujar puntos en una función cuadrática.

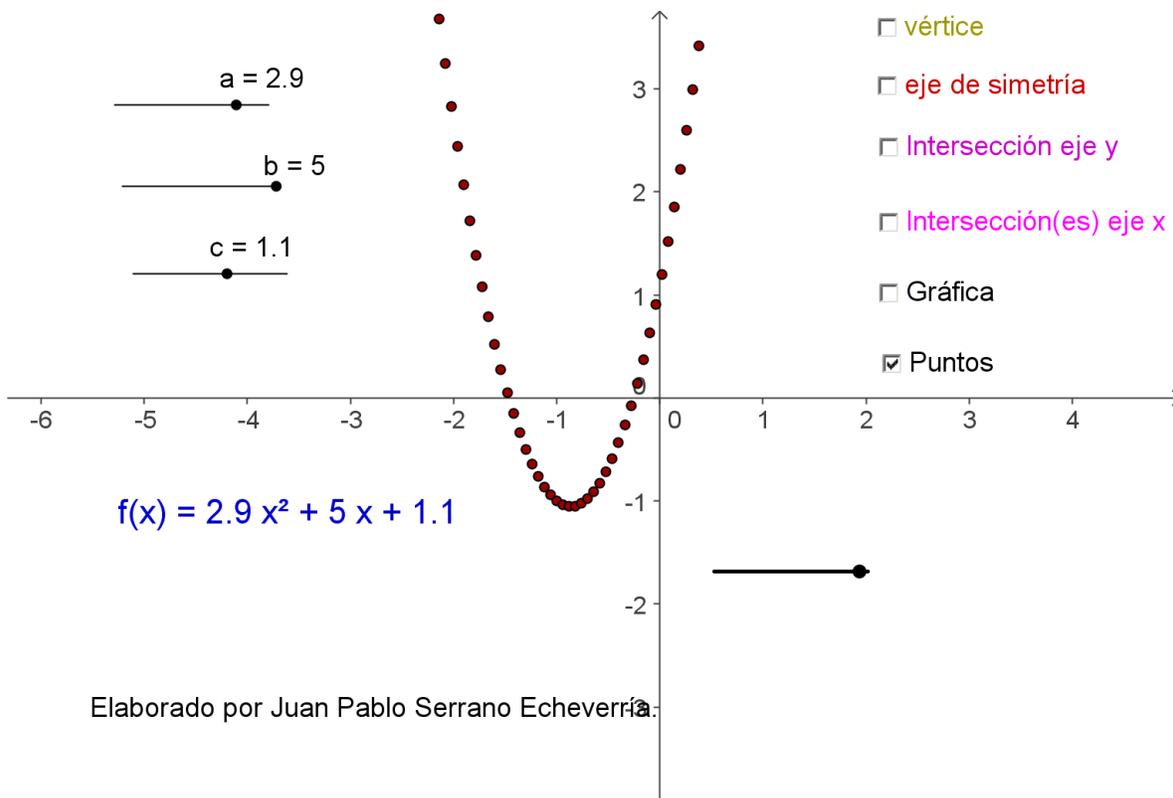
1. Dibuje una función cuadrática con sus respectivos deslizadores. Agréguele los elementos extras que usted considere conveniente.



2. Piense en la secuencia con un deslizador numérico (mínimo 0,01 y máximo 0,99) para marcar un grupo de puntos en la función. (Respuesta en la siguiente página)

3. Se debe utilizar el comando **Secuencia[Expresión, Variable i, Número a, Número b, Incremento]** de la siguiente forma:

Secuencia[(i, a i² + b i + c), i, -10, 10, j]. ¿Por qué?



Práctica 7.

Utilice el comando secuencia para realizar una aplicación interactiva basado en el Programa de Estudios.

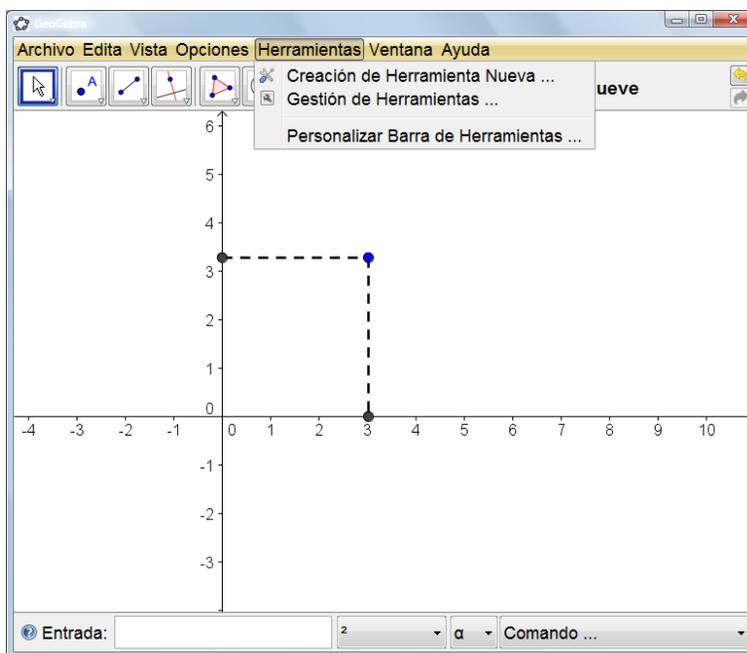
Herramientas Personalizadas

Creación de Herramientas Personalizadas.

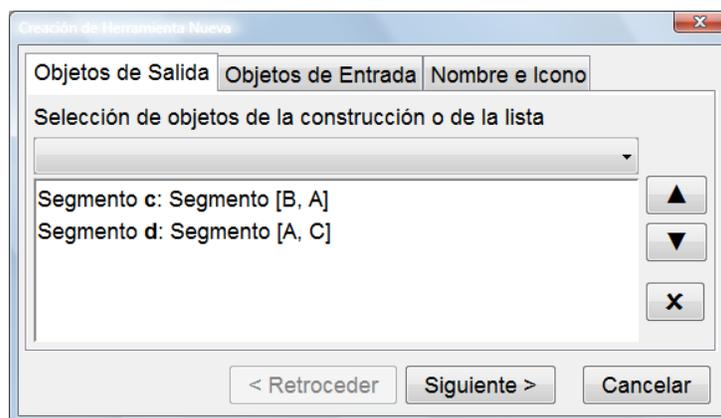
Ejemplo 1:

Se realizará una herramienta para marcar los componentes x y y de un punto.

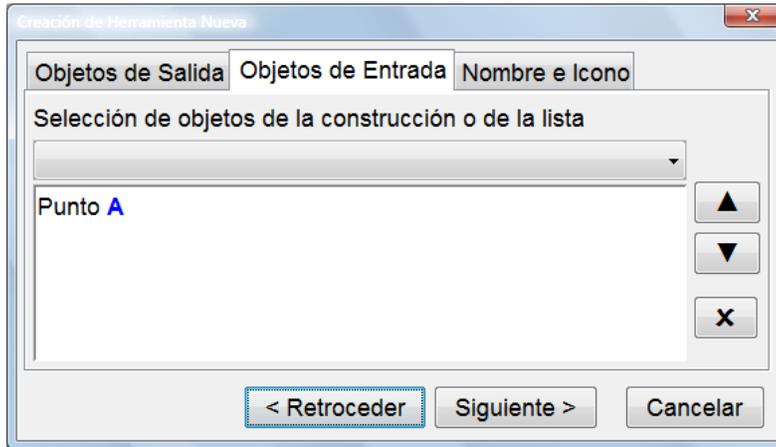
1. Trace un punto y marque sus componentes x y y. Luego selecciona El menú "herramientas"



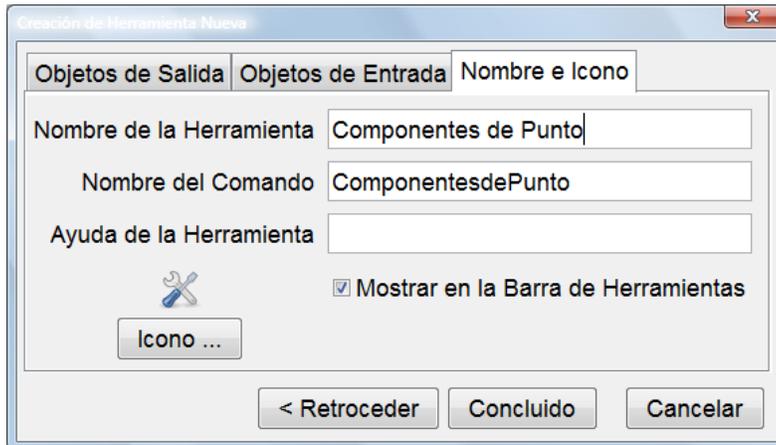
2. Selecciona Creación de Herramienta Nueva. Como objeto de salida escoge los dos segmentos creados.



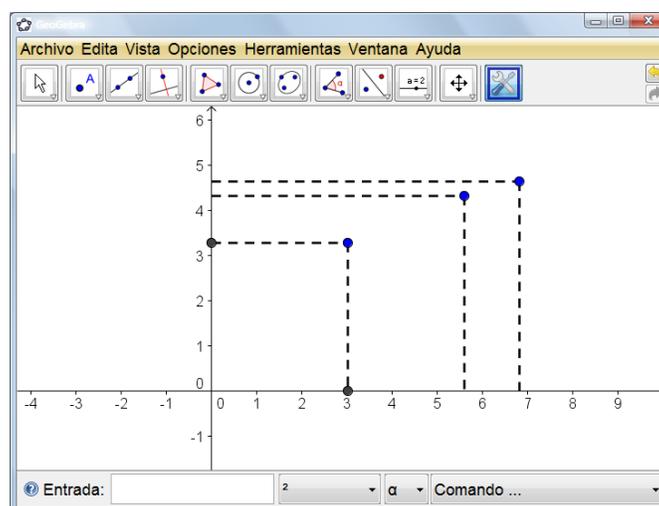
- Como Objeto de Entrada, selecciona el punto al cual se le trazaron los segmentos. Pulsa siguiente.



- Como nombre de la herramienta escribe "Componentes de Punto".



- Ya la herramienta está lista para utilizarse.



Anexo 2

Listas y Secuencias

Anexa

Anexa[Lista, Objeto]: Anexa el objeto a la lista

Ejemplo: Anexa[{1, 2, 3}, (5, 5)] da por resultado {1, 2, 3, (5, 5)}

Anexa[Objeto, Lista]: Anexa la lista al objeto

Ejemplo: Anexa[(5, 5), {1, 2, 3}] da por resultado {(5, 5), 1, 2, 3}

Anexa[<Lista>, <Objeto>]

Anexa[<Objeto>, <Lista>]

CuentaSi

CuentaSi[Condición, Lista]: Cuenta el número de elementos de la lista que cumplen con la condición dada

Ejemplos:

CuentaSi[$x < 3$, {1, 2, 3, 4, 5}] da por resultado el número 2

CuentaSi[$x < 3$, A1:A10] donde A1:A10 es un rango de celdas de la hoja de cálculo, cuenta todas las celdas cuyos valores son menores que 3.

Elemento

Elemento[Lista, Número n]: Determina el elemento número n (*enésimo*) de la lista

Atención: La lista puede contener únicamente objetos del mismo tipo (por ejemplo, sólo números o sólo puntos).

Primero

Primero[Lista]: Da por resultado el primer elemento de la lista

Primero[Lista, Número n de elementos]: Da por resultado una nueva lista, que contiene los primeros n elementos de la dada.

Intercala

Intercala[Objeto, Lista, Posición] Da por resultado una nueva lista en la que se intercalara el objeto dado en la posición especificada.

Ejemplo: Intercala[x^2 , {1, 2, 3, 4, 5}, 3] ubica a x^2 en la tercera posición y da por resultado la lista {1, 2, x^2 , 3, 4, 5}

Atención: Si la posición fuera un número negativo, se cuenta desde el final de la lista y en adelante hacia la derecha.

Ejemplo: Intercala $[(1, 2), \{1, 2, 3, 4, 5\}, -1]$ ubica el punto al final y da por resultado la lista $\{1, 2, 3, 4, 5, (1, 2)\}$

Intercala[Lista 1, Lista 2, Posición] Intercala todos los elementos de *lista 1* en *lista 2* en la posición indicada.

Ejemplo: Intercala $[\{11, 12\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, 3]$ ubica los elementos de la primera lista a partir de la tercera posición de la segunda y da por resultado la nueva lista $\{1, 2, 11, 12, 3, 4, 5\}$

Atención: Si la posición fuera un número negativo, se cuenta desde el final de la lista y en adelante hacia la derecha.

Ejemplo: Intercala $[\{11, 12\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, -2]$ ubica los elementos de la primera lista desde la penúltima posición de la segunda (antes del último elemento) y da por resultado $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 5\}$.

Intersección

Intersección[Lista 1, Lista 2]: Da por resultado una nueva lista que contiene todos los elementos comunes a ambas.

Listaliteración

Listaliteración[Función, Valor Inicial x_0 , Número de Iteraciones n]: Da por resultado una lista de $n+1$ elementos que resultan de las iteraciones de la función a partir del valor inicial x_0 .

Ejemplo: Tras definir la función $f(x) = x^2$ el comando

$L = \text{Listaliteración}[f, 3, 2]$ da por resultado la lista

$$L = \{3, 3^2, (3^2)^2\} = \{3, 9, 81\}$$

Encadena

Encadena[Lista 1, Lista 2, ...Lista n]: Encadena dos o más listas, dando por resultado una nueva en la que se organiza la sucesión de elementos de cada una de las dadas, por orden.

Atención: La nueva lista contiene todos los elementos de cada una de las dadas, pese a posibles repeticiones y sin reordenamiento alguno.

Ejemplos:

Encadena $[\{5, 4, 3\}, \{1, 2, 3\}]$ crea la lista $\{5, 4, 3, 1, 2, 3\}$

Encadena[Lista de listas]: Encadenas las sub-listas en una de longitud mayor en que se concatenan sus correspondientes elementos.

Atención: La nueva lista contiene todos los elementos de cada una de las dadas, pese a posibles repeticiones y sin reordenamiento alguno.

Ejemplos:

Encadena[{{1, 2}}] crea la lista {1, 2}

Encadena[{{1, 2, 3}, {3, 4}, {8, 7}}] crea la lista {1, 2, 3, 3, 4, 8, 7}

ConservaSi

ConservaSi[Condición, Lista]: Crea una nueva lista que únicamente contiene aquellos elementos de la dada que cumplan con la condición especificada.

Ejemplo: ConservaSi [$x < 3$, {1, 2, 3, 4, 1, 5, 6}] Da por resultado la nueva lista {1, 2, 1}

Ultimo

Ultimo[Lista]: Da por resultado el último elemento de la lista.

Ultimo[Lista, Los n últimos elementos (número)]: Da por resultado una lista que contiene los últimos n últimos elementos de la dada.

Longitud

Longitud[Lista] Establece la longitud de la lista, determinada por el número de elementos que la compone.

Mínimo

Mínimo[Lista]: Da por resultado el mínimo elemento de la lista

Mínimo[Número (o valor numérico), Número (o valor numérico)]: Da por resultado el menor de entre los dos números dados.

Máximo

Máximo[Lista]: Da por resultado el máximo elemento de la lista

Máximo[Número (o valor numérico), Número (o valor numérico)] Da por resultado el mayor de los dos números dados.

Producto

Producto[Lista de números]: Calcula el producto de todos los números de la lista

EliminaIndefinidos

EliminaIndefinidos[Lista]: Establece una lista de la que se ha eliminados los objetos indefinidos de la dada.

Ejemplo: `EliminaIndefinidos[Secuencia[(-1)^i, i, -3, -1, 0.5]]` da por resultado una lista de la que se ha eliminado el segundo y el cuarto elementos de la secuencia dado que, al estar elevados a exponentes no enteros, quedan indefinidos.

ListaInversa

ListaInversa[Lista]: Crea una lista cuyos elementos aparecen en orden inverso respecto de la dada.

Secuencia

Secuencia[Expresión, Variable i , Número a , Número b]: Establece una lista de objetos creados desde la expresión dada y el índice i que varía en el rango que va del número a al b .

Ejemplo: `L = Secuencia[(2, i), i, 1, 5]` crea una lista de puntos cuyas ordenadas (coordenadas y) varían dentro del rango de 1 a 5

Secuencia[Expresión, Variable i , Número a , Número b , Incremento]: Establece una lista de objetos creados desde la expresión dada y el índice i que varía en el rango que va del número a al b con el incremento dado.

Ejemplo: `L = Secuencia[(2, i), i, 1, 5, 0.5]` crea una lista de puntos cuyas ordenadas (coordenadas y) varían en el rango de 1 a 5, con un incremento de a 0.5.

Atención: Como los parámetros a y b son dinámicos, también se pueden emplear en este caso variables, como las establecidas por un [deslizador](#).

Ordena

Ordena[Lista]: Crea una lista compuesta por los elementos ordenados (números, objetos de texto o puntos) de la dado.

Atención: Las listas de puntos se organizan según el orden creciente de sus abscisas (coordenadas x).

Ejemplos:

`Ordena[{{3, 2, 1}}]` da por resultado la lista `{1, 2, 3}`.

Ordena[{"pera", "ananá", "fresa"}] da por resultado la lista de tales elementos ordenados alfabéticamente [{"ananá", "fresa", "pera"}]

Ordena[{(3, 2), (2, 5), (4, 1)}] resulta {(2, 5), (3, 2), (4, 1)}.

Suma

Suma[Lista]: Calcula la suma de todos los elementos de la lista.

Atención: Este comando opera con números, puntos, vectores, texto y funciones.

Ejemplos:

Suma[{1, 2, 3}] da por resultado el número $a = 6$.

Suma[{ x^2 , x^3 }] da por resultado $f(x)=x^2 + x^3$.

Suma[Secuencia[i, i, 1, 100]] da por resultado el número $a = 5050$.

Suma[{(1, 2), (2, 3)}] da por resultado el punto $A = (3, 5)$.

Suma[{(1, 2), 3}] da por resultado el punto $B = (4, 2)$.

Suma[{"a", "b", "c"}] da por resultado el texto "abc".

Suma[Lista, Número n de elementos]: Calcula la suma de los primeros n elementos de la lista.

Atención: Este comando opera con números, puntos, vectores, texto y funciones.

Ejemplo: Suma[{1, 2, 3, 4, 5, 6}, 4] da por resultado el número $a = 10$.

Extrae

Extrae[Lista, Posición Inicial m , Posición Final n]: Da por resultado una lista que contiene los elementos, desde el que ocupa la posición m a la n en la dada.

Unión

Unión[Lista 1, Lista 2]: Encadena las dos listas, eliminando los elementos que aparecen más de una vez.